

4.2 Un arquitecte dissenya un hivernacle menut per a un jardí. El terra de l'hivernacle té forma de triangle per a maximitzar-ne l'eficiència i la captació de llum. El perímetre total de l'hivernacle està fixat en 60 metres per a complir amb les restriccions mediambientals de la zona. Un dels costats del triangle fa x metres i els altres dos costats tenen la mateixa longitud.

4.2.1 (1 punt) Dedueix l'expressió de la funció $A(x)$ que representa l'àrea del terra de l'hivernacle.

4.2.1. Deduir l'expressió de la funció $A(x)$

1. Calculem els altres dos costats

Anomenem y la longitud de cadascun dels dos costats iguals.

Com que el perímetre és 60:

$$x + y + y = 60$$

$$x + 2y = 60$$

Aïllem y :

$$2y = 60 - x$$

$$y = 30 - \frac{x}{2}$$

2. Calculem l'altura del triangle

Com que és un triangle isòsceles, si tracem l'altura des del vèrtex superior, aquesta divideix la base x en dues parts iguals:

$$\frac{x}{2}$$

Tenim un triangle rectangle en què:

- hipotenusa: $y = 30 - \frac{x}{2}$
- un catet: $\frac{x}{2}$
- l'altura: h

Pel teorema de Pitàgores:

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(30 - \frac{x}{2}\right)^2$$

Per tant:

$$h^2 = \left(30 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Desenvolupem:

$$h^2 = 900 - 30x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}$$

$$h^2 = 900 - 30x$$

Així:

$$h = \sqrt{900 - 30x}$$

3. Calculem l'àrea

L'àrea d'un triangle és:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

La base és x , per tant:

$$A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{900 - 30x}$$

Així obtenim:

$$A(x) = \frac{x}{2} \sqrt{900 - 30x}$$

Domini de la funció

Perquè el triangle existisca, hem de tenir:

$$900 - 30x > 0$$

$$x < 30$$

A més:

$$x > 0$$

Per tant:

$$0 < x < 30$$

4.2.2 (1.5 punts) L'arquitecte defineix una funció d'eficiència estructural $f(x)$ que es calcula com el quadrat de l'àrea del terra de l'hivernacle. Obtén el valor de x per al qual l'eficiència estructural és màxima i troba'n l'àrea en aquest cas.

4.2.2. Maximitzar la funció d'eficiència

L'enunciat diu que l'eficiència estructural és:

$$f(x) = A(x)^2$$

Com que:

$$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{900 - 30x}$$

tenim:

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\sqrt{900 - 30x}\right)^2$$

Elevem al quadrat:

$$f(x) = \frac{x^2}{4}(900 - 30x)$$

Desenvolupem:

$$f(x) = 225x^2 - \frac{15}{2}x^3$$

és a dir:

$$f(x) = 225x^2 - 7,5x^3$$

1. Busquem els punts crítics

Derivem:

$$f'(x) = 450x - 22,5x^2$$

Traiem factor comú:

$$f'(x) = 22,5x(20 - x)$$

Per trobar els punts crítics:

$$f'(x) = 0$$

Per tant:

$$22,5x(20 - x) = 0$$

Això ens dona:

$$x = 0$$

o:

$$20 - x = 0$$

$$\boxed{x = 20}$$

Com que el domini és $0 < x < 30$, el valor que ens interessa és:

$$\boxed{x = 20 \text{ m}}$$

2. Comprovem que és un màxim

Estudiem el signe de $f'(x)$.

Si $0 < x < 20$:

$$x > 0, \quad 20 - x > 0$$

Per tant:

$$f'(x) > 0$$

La funció **creix**.

Si $20 < x < 30$:

$$x > 0, \quad 20 - x < 0$$

Per tant:

$$f'(x) < 0$$

La funció **decreix**.

Així:

$$x = 20$$

és un **màxim**.

3. Calculem l'àrea en el cas òptim

Si:

$$x = 20$$

els altres dos costats mesuren:

$$y = 30 - \frac{20}{2}$$

$$y = 20$$

Per tant, el triangle òptim és **equilàter**, amb els tres costats de 20 m.

La seua altura és:

$$h = \sqrt{900 - 30(20)}$$

$$h = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

L'àrea és:

$$A = \frac{20 \cdot 10\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 100\sqrt{3} \text{ m}^2$$

Aproximadament:

$$A \approx 173,21 \text{ m}^2$$

4. Valor màxim de l'eficiència

Com que:

$$f(x) = A(x)^2$$

tenim:

$$f(20) = (100\sqrt{3})^2$$

$$= 10000 \cdot 3$$

$$f(20) = 30000$$