

**4.2** Considerem un triangle rectangle  $T$  amb els catets que es tallen a l'origen de coordenades del pla; el catet horitzontal mesura 4 unitats i el catet vertical 3. Considerem un rectangle  $R$  inscrit en el triangle  $T$  de manera que dos costats del rectangle  $R$  reposen sobre els catets de  $T$  i un dels seus vèrtexs es troba sobre la hipotenusa de  $T$ . Considerem que  $x$  és la longitud del costat de  $R$  que reposa sobre el catet més llarg i  $y$  la longitud del costat de  $R$  que reposa sobre el catet més curt.

**4.2.1 (1 punt)** Calcula l'equació de la recta que conté la hipotenusa del triangle  $T$ .

Tenim un triangle rectangle  $T$  amb:

- catet horitzontal de longitud 4
- catet vertical de longitud 3
- tots dos catets es tallen a l'origen.
- Un rectangle  $R$  està inscrit dins del triangle.
- Dos costats del rectangle reposen sobre els catets.
- El vèrtex oposat a l'origen està sobre la hipotenusa.
- $x$  és la longitud del costat sobre el catet més llarg.
- $y$  és la longitud del costat sobre el catet més curt.

### 4.2.1. Equació de la recta que conté la hipotenusa

El triangle té els vèrtexs:

- $A = (0,0)$
- $B = (4,0)$
- $C = (0,3)$

La hipotenusa és el segment que uneix:

$B(4,0)$  i  $C(0,3)$ .

#### Pas 1. Calculem el pendent

La fórmula del pendent és:

$$m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

Per tant:

$$m = (3 - 0)/(0 - 4)$$

$$m = 3/(-4)$$

$$m = -3/4$$

## Pas 2. Equació de la recta

Utilitzem:

$$y = mx + b$$

Sabem que:

$$m = -3/4$$

i la recta passa per (4,0).

Substituïm:

$$0 = (-3/4) \cdot 4 + b$$

$$0 = -3 + b$$

Per tant:

$$b = 3$$

Així, l'equació de la hipotenusa és:

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

També la podem escriure com:

$$3x + 4y - 12 = 0$$

 **Resultat 4.2.1**

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

**4.2.2 (1.5 punts)** Calcula els valors de  $x$  i  $y$  que fan que l'àrea de  $R$  siga màxima i calcula aquesta àrea.

## 4.2.2. Valors de $x$ i $y$ perquè l'àrea siga màxima

Ara ve la part d'optimització.

### Pas 1. Relació entre $x$ i $y$

El vèrtex superior dret del rectangle és:

$(x,y)$

Com que aquest punt està sobre la hipotenusa, ha de complir l'equació:

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

Per tant:

$$y = 3 - \frac{3}{4}x$$

Aquesta és la relació que hi ha entre  $x$  i  $y$ .

### Pas 2. Escrivim l'àrea del rectangle

L'àrea d'un rectangle és:

**Àrea = base · altura**

En aquest cas:

- base =  $x$
- altura =  $y$

Per tant:

**$A = x \cdot y$**

Com que sabem que:

$$y = 3 - \frac{3}{4}x$$

substituïm:

$$A(x) = x \left( 3 - \frac{3}{4}x \right)$$

Desenvolupem:

$$A(x) = 3x - \frac{3}{4}x^2$$

Ara tenim l'àrea escrita només en funció de x.

### Pas 3. Busquem el màxim

Derivem:

$$A'(x) = 3 - \frac{3}{2}x$$

Per trobar els possibles màxims, igualem la derivada a zero:

$$3 - \frac{3}{2}x = 0$$

Passem el segon terme a l'altre costat:

$$3 = \frac{3}{2}x$$

Multipliquem per 2:

$$6 = 3x$$

Per tant:

$$x = 2$$

## Pas 4. Calculem y

Recordem:

$$y = 3 - \frac{3}{4}x$$

Substituïm  $x = 2$ :

$$y = 3 - \frac{3}{4}(2)$$

$$y = 3 - \frac{6}{4}$$

$$y = 3 - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}$$

Per tant:

$$x = 2, \quad y = \frac{3}{2}$$

És a dir:

**x = 2 unitats**

**y = 1,5 unitats**

## Pas 5. Comprovem que és un màxim

Cal assegurar-nos que el punt crític correspon realment a un màxim.

Calculem la segona derivada:

$$A''(x) = -\frac{3}{2}$$

Com que:

$$A''(x) < 0$$

per a qualsevol  $x$ , la funció àrea és còncava cap avall.

Per tant, el punt que hem trobat és un **màxim**.

✓ Per tant:

$$x = 2, \quad y = \frac{3}{2}$$

## Pas 6. Calculem l'àrea màxima

L'àrea és:

$$A = x \cdot y$$

Substituïm:

$$A = 2 \cdot \frac{3}{2}$$

$$A = 3$$

Per tant:

$$A_{\text{màxima}} = 3 \text{ unitats}^2$$