

- 4.2** Un decorador vol pintar una paret rectangular de 12 metres de llarg per 3 d'alt. Per a fer-ho, suposa que el cantó inferior esquerre de la paret correspon a l'origen de coordenades d'un pla i pinta en la paret la corba d'equació

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuació, el decorador pinta de roig la part de la paret que queda per damunt de la corba i de verd la que queda per davall.

- 4.2.1 (1.25 punts)** Dibuixa la part de la corba anterior que correspon a la paret i detalla'n els talls amb els eixos, els extrems absoluts i la monotonia de la funció en l'interval $[0,12]$.

4.2.1 Dibuixa la corba i detalla'n les característiques. (1,25 punts)

1. Domini considerat

Només interessa la part de la paret,

$$x \in [0, 12].$$

2. Talls amb els eixos

Tall amb l'eix Y

Per a $x = 0$,

$$f(0) = \cos(0) + 2 = 3.$$

Per tant,

$$(0, 3).$$

Tall amb l'eix X

Cal resoldre

$$\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 = 0.$$

És a dir,

$$\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = -2,$$

que és impossible.

No talla l'eix X.

3. Màxims i mínims absoluts

La derivada és

$$f'(x) = -\frac{\pi}{9} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right).$$

Els punts crítics satisfan

$$\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0.$$

A l'interval

$$[0, 12],$$

obtenim

$$x = 0, \quad x = 9.$$

Cal estudiar també l'extrem

$$x = 12.$$

Valor en els punts

$$f(0) = 3.$$

$$f(9) = 1.$$

$$f(12) = 2 + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Resultat

Màxim absolut

$$(0, 3).$$

Mínim absolut

$$(9, 1).$$

4. Monotonia

Com que

$$f'(x) = -\frac{\pi}{9} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right),$$

sabem que

- si

$$0 < x < 9,$$

el sinus és positiu,

per tant

$$f'(x) < 0.$$

La funció **decreix**.

Si

$$9 < x < 12,$$

el sinus és negatiu,

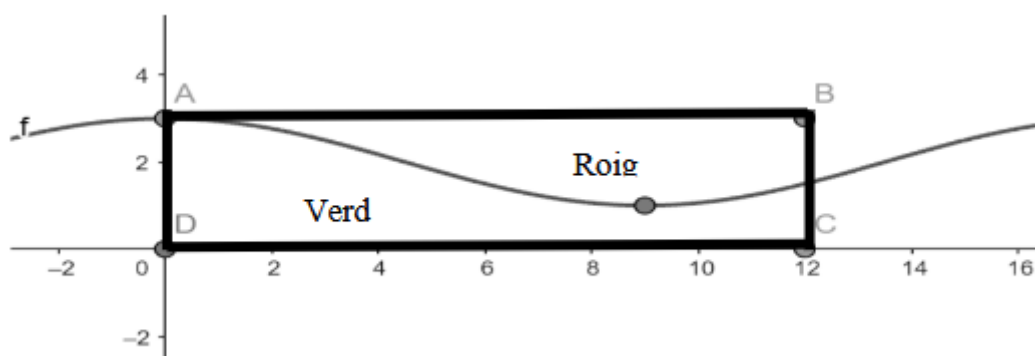
i

$$f'(x) > 0.$$

La funció creix.

Resposta

Decreix en $(0, 9)$ i creix en $(9, 12)$.



4.2.2 (1 punt) Calcula l'àrea de la paret que té color verd i la que té color roig.

4.2.2 Calcula l'àrea verda i la roja. (1 punt)

Àrea de la paret

$$12 \cdot 3 = 36 \text{ m}^2.$$

Àrea verda

És

$$A_V = \int_0^{12} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{9} \right) + 2 \right) dx.$$

Integrem.

La primitiva és

$$\frac{9}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{9} \right) + 2x.$$

Avaluem entre 0 i 12.

$$A_V = \frac{9}{\pi} \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) + 24.$$

Com que

$$\sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

resulta

$$A_V = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}.$$

Numèricament,

$$A_V \approx 21,52 \text{ m}^2.$$

Àrea roja

És la diferència amb l'àrea total.

$$A_R = 36 - A_V.$$

$$A_R = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}.$$

Numèricament,

$$A_R \approx 14,48 \text{ m}^2.$$

4.2.3 (0.25 punts) La part verda es pinta usant pots de pintura capaços de cobrir 3 metres quadrats cadascun. Quin és el nombre mínim de pots que necessitarem per a pintar la part verda?

4.2.3 Nombre mínim de pots de pintura. (0,25 punts)

Cada pot cobreix

$$3 \text{ m}^2.$$

Necessitem

$$\frac{21,52}{3} = 7,17.$$

Com que no podem comprar una fracció de pot,

cal arrodonir **per excés**.

8 pots.
