

P4.2 Un equip d'investigadors estudia la distància recorreguda per un dofí des del punt on ha estat alliberat dins una reserva marina. La distància recorreguda al cap de t segons ve donada per la funció

$$d(t) = 140(1 - e^{-0.05t}),$$

on $t \geq 0$ i $d(t)$ és la distància recorreguda en metres. Sigui $d'(t)$ la velocitat, en m/s, en l'instant t .

(a) [0.5 punts] Calcula a quin valor tendeix la distància recorreguda pel dofí al llarg del temps.

P4.2

La distància recorreguda pel dofí al cap de t segons és:

$$\boxed{d(t) = 140(1 - e^{-0.05t})}, \quad t \geq 0$$

on $d(t)$ està expressada en metres.

La velocitat és:

$$\boxed{d'(t)}$$

i està expressada en m/s.

(a) A quina distància tendirà el dofí al llarg del temps?

Ens demanen què passa amb la distància quan passa molt de temps, és a dir:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t)$$

Partim de:

$$d(t) = 140 (1 - e^{-0,05t})$$

Quan:

$$t \rightarrow +\infty$$

tenim:

$$-0,05t \rightarrow -\infty$$

i, per tant:

$$e^{-0,05t} \rightarrow 0$$

Així:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 140(1 - 0)$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 140}$$

Resposta

La distància recorreguda pel dofí **tendeix a 140 metres**:

$$\boxed{140 \text{ m}}$$

Això no significa que arribi exactament als 140 m en un temps finit, sinó que s'hi aproxima cada vegada més.

- (b) [1.5 punts] Estudia el comportament de la velocitat del dofí, indicant en quins moments augmenta o disminueix, així com quines són les velocitats mínima i la màxima observades en aquest estudi.

(b) Estudiem el comportament de la velocitat

Pas 1. Calculem la velocitat

La velocitat és la derivada de la distància:

$$v(t) = d'(t)$$

Tenim:

$$d(t) = 140(1 - e^{-0,05t})$$

Derivem:

$$d'(t) = 140 (0 - (-0,05)e^{-0,05t})$$

Per tant:

$$v(t) = 7e^{-0,05t}$$

Pas 2. Estudiem si la velocitat augmenta o disminueix

Per saber-ho, calculem la derivada de la velocitat:

$$v'(t) = d''(t)$$

Derivem:

$$v(t) = 7e^{-0,05t}$$

i obtenim:

$$v'(t) = 7(-0,05)e^{-0,05t}$$

$$v'(t) = -0,35e^{-0,05t}$$

Ara estudiem el signe.

Com que:

$$e^{-0,05t} > 0$$

per a qualsevol $t \geq 0$, tenim:

$$-0,35e^{-0,05t} < 0$$

Per tant:

$$v'(t) < 0 \quad \forall t \geq 0$$

Això significa que la velocitat és **estrictaament decreixent** durant tot l'estudi.

$$\text{La velocitat disminueix en } [0, +\infty)$$

No hi ha cap interval on augmente.

Pas 3. Velocitat màxima

Com que la velocitat és decreixent, el seu valor màxim es produeix en l'instant inicial:

$$t = 0$$

Calculem:

$$\begin{aligned} v(0) &= 7e^{-0,05 \cdot 0} \\ &= 7e^0 \end{aligned}$$

$$v(0) = 7 \text{ m/s}$$

Per tant:

$$v_{\max} = 7 \text{ m/s}$$

Pas 4. Velocitat mínima

Estudiem què passa quan $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 7e^{-0,05t}$$

Com que:

$$e^{-0,05t} \rightarrow 0$$

tenim:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$$

Però hi ha un matís important:

$$v(t) = 7e^{-0,05t} > 0$$

per a **qualsevol valor finit de t** .

Per tant, la velocitat s'aproxima a 0 però **mai arriba a ser 0**.

Així, matemàticament:

- **No existeix una velocitat mínima assolida.**
- El seu **ínfim** és 0 m/s.

Podem escriure:

$$\inf v(t) = 0 \text{ m/s}$$

i:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0 \text{ m/s}$$

Interpretació física

Al principi, el dofí es mou a:

$$7 \text{ m/s}$$

Després, la velocitat va disminuint contínuament:

$$7 \longrightarrow \text{valors cada vegada més petits} \longrightarrow 0$$

Al mateix temps, la distància recorreguda augmenta, però cada vegada més lentament, fins a aproximar-se als:

$$140 \text{ m}$$