

P4.2 [2 punts] La desviació vertical d'un dron, $y(t)$ (en metres), respecte d'una altura de referència després d'una pertorbació inicial, es descriu al llarg del temps t (en segons) com

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}, \quad t \geq 0,$$

on els valors positius de $y(t)$ indiquen que el dron es troba per sobre de l'altura de referència, mentre que els valors negatius indiquen que es troba per sota d'aquesta.

Demostra que existeix almenys un instant de temps t en què el dron es troba exactament a l'altura de referència.

1. Què significa estar a l'altura de referència?

Segons l'enunciat:

- Si $y(t) > 0$, el dron està per damunt de l'altura de referència.
- Si $y(t) < 0$, està per davall.
- Per tant, si està **exactament a l'altura de referència**, ha de complir:

$$y(t) = 0$$

Per tant, el que hem de demostrar és que **existeix algun $t \geq 0$ tal que $y(t) = 0$** .

2. Comprovem que la funció és contínua

La funció és racional:

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}$$

El denominador és:

$$t^4 + 2$$

Com que $t^4 \geq 0$, tenim:

$$t^4 + 2 > 0$$

per a qualsevol $t \geq 0$.

Per tant, el denominador **mai no és zero** i, en conseqüència, $y(t)$ és contínua per a tot $t \geq 0$.

3. Busquem dos instants en què la funció tinga signes diferents

Triem dos valors senzills:

Per a $t = 0$:

$$y(0) = \frac{0^3 + 0^2 + 2 \cdot 0 - 1}{0^4 + 2}$$
$$y(0) = \frac{-1}{2} < 0$$

Això significa que inicialment el dron està **per davall de l'altura de referència**.

Per a $t = 1$:

$$y(1) = \frac{1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{1^4 + 2}$$
$$y(1) = \frac{1 + 1 + 2 - 1}{3}$$
$$y(1) = 1 > 0$$

Per tant, en $t = 1$ el dron està **per damunt de l'altura de referència**.

Així doncs:

$$y(0) < 0 \quad \text{i} \quad y(1) > 0$$

4. Apliquem el teorema de Bolzano

Recordem el **teorema de Bolzano**:

Si una funció és contínua en un interval $[a, b]$ i pren valors de signe contrari als extrems, és a dir, $f(a) \cdot f(b) < 0$, aleshores existeix almenys un punt $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

En el nostre cas:

- $y(t)$ és contínua en $[0, 1]$.
- $y(0) < 0$.
- $y(1) > 0$.

Per tant, pel **teorema de Bolzano**, existeix almenys un:

$$t_0 \in (0, 1)$$

tal que:

$$y(t_0) = 0$$

5. Interpretació física

Com que $y(t_0) = 0$, en aquest instant la desviació vertical del dron respecte de l'altura de referència és zero.

Per tant, el dron es troba **exactament a l'altura de referència** en algun instant entre 0 i 1 segon.

Existeix almenys un instant $t_0 \in (0, 1)$ en què el dron està a l'altura de referència.

Conclusió: hem demostrat l'existència demanada utilitzant el **teorema de Bolzano**, sense necessitat de calcular exactament l'instant.