

P5.2 [2 punts] Volem determinar el cost horari de tres serveis que ofereix una empresa de lloguer de material audiovisual. Aquests serveis són: il·luminació professional, amb un cost de x €/hora; equip de so, amb un cost de y €/hora; càmeres de gravació, amb un cost de z €/hora. S'han registrat les despeses totals associades a tres esdeveniments diferents:

$$\text{Esdeveniment 1: } 2x + y + z = 6500,$$

$$\text{Esdeveniment 2: } 4x + 5y + 7z = 22500,$$

$$\text{Esdeveniment 3: } x + 2y + 3z = 8000.$$

Justifica si, amb la informació proporcionada, es poden determinar de manera única els costos dels tres serveis.

P5.2 — Determinar si els costos es poden obtenir de manera única

Tenim tres incògnites:

x = cost de la il·luminació professional (€/h)

y = cost de l'equip de so (€/h)

z = cost de les càmeres (€/h)

I el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6500 & (1) \\ 4x + 5y + 7z = 22500 & (2) \\ x + 2y + 3z = 8000 & (3) \end{cases}$$

La pregunta és si aquest sistema permet determinar **de manera única** els tres costos.

1. Comprovem si les tres equacions són independents

Una manera molt senzilla és comparar les equacions.

Restem l'equació (1) de l'equació (2):

$$(4x + 5y + 7z) - (2x + y + z) = 22500 - 6500$$

Obtenim:

$$2x + 4y + 6z = 16000$$

Dividim entre 2:

$$x + 2y + 3z = 8000$$

Però aquesta és **exactament** l'equació (3):

$x + 2y + 3z = 8000$

Per tant:

$\frac{(3) = (2) - (1)}{2}$

Això significa que la tercera equació **no aporta informació nova**.

2. Quantes equacions independents tenim?

En realitat només tenim dues equacions independents:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6500 \\ 4x + 5y + 7z = 22500 \end{cases}$$

però tenim **tres incògnites**:

$$x, y, z$$

Per determinar tres incògnites de manera única necessitaríem, en aquest cas, tres equacions independents.

Com que només tenim **dues equacions independents**, el sistema tindrà infinites solucions.

3. Ho podem veure amb Gauss

Escrivim la matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6500 \\ 4 & 5 & 7 & 22500 \\ 1 & 2 & 3 & 8000 \end{array} \right)$$

Fem:

$$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$$

i obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6500 \\ 0 & 3 & 5 & 9500 \\ 1 & 2 & 3 & 8000 \end{array} \right)$$

Ara podem fer, per exemple:

$$F_3 \leftarrow 2F_3 - F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6500 \\ 0 & 3 & 5 & 9500 \\ 0 & 3 & 5 & 9500 \end{array} \right)$$

Les dues últimes files són iguals. Restant-les:

$$F_3 \leftarrow F_3 - F_2$$

obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6500 \\ 0 & 3 & 5 & 9500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Apareix una fila de zeros:

$$\boxed{0 = 0}$$

Això confirma que només tenim **2 equacions independents** per a **3 incògnites**.

4. Conclusió

Per tant, **no podem determinar de manera única** els costos dels tres serveis.

No hi ha una única solució.

Hi ha **infinites solucions**.

De fet, podem deixar una incògnita com a paràmetre. Per exemple, prenem:

$$z = t$$

De la segona equació de Gauss:

$$3y + 5z = 9500$$

Substituïm $z = t$:

$$3y + 5t = 9500$$

$$y = \frac{9500 - 5t}{3}$$

I de la primera equació:

$$2x + y + z = 6500$$

$$2x + \frac{9500 - 5t}{3} + t = 6500$$

d'on:

$$x = \frac{5000 + t}{3}$$

Per tant, les solucions són:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5000 + t}{3} \\ y &= \frac{9500 - 5t}{3} \\ z &= t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

Així queda demostrat que hi ha **infinites combinacions de costos** que satisfan les dades.

 Resposta final

Els costos NO es poden determinar de manera única.

La raó és que la tercera equació és dependent de les dues primeres:

$$(2) - (1) = 2(3)$$

i, per tant, només hi ha **2 equacions independents** per a **3 incògnites**.