

Problema A1. — L'any 2025 la mediana dels salaris a Espanya va ser d'aproximadament 24 000 € anuals. És a dir, la meitat de treballadors guanyaren més, i la meitat de treballadors guanyaren menys d'aquesta quantitat. Segons l'Institut Nacional d'Estadística,

- dels treballadors amb un salari inferior a la mediana, el 31% no estaven satisfets amb la seva feina i l'altre 69% sí que n'estaven satisfets,
- dels treballadors amb un salari superior a la mediana, el 26% no estaven satisfets amb la seva feina i l'altre 74% sí que n'estaven satisfets.

a) Escollint un treballador a l'atzar, quina és la probabilitat que no estigui satisfet amb la seva feina? (1 pt)

1. Definim els esdeveniments

Considerem:

- I : el treballador té un **salari inferior** a la mediana.
- S : el treballador té un **salari superior** a la mediana.
- N : el treballador **no està satisfet** amb la seua feina.

Com que la mediana és de 24.000 € i divideix els treballadors en dues meitats:

$$P(I) = 0,5$$

$$P(S) = 0,5$$

A més, l'enunciat ens diu:

$$P(N | I) = 0,31$$

i

$$P(N | S) = 0,26$$

a) Probabilitat que un treballador no estiga satisfet

Ens demanen:

$$\boxed{P(N)}$$

Com que podem estar davant d'un treballador amb salari inferior o superior a la mediana, utilitzem el **teorema de la probabilitat total**:

$$P(N) = P(N | I) \cdot P(I) + P(N | S) \cdot P(S)$$

Substituïm les dades:

$$P(N) = 0,31 \cdot 0,5 + 0,26 \cdot 0,5$$

Calculem cada terme:

$$0,31 \cdot 0,5 = 0,155$$

$$0,26 \cdot 0,5 = 0,13$$

Per tant:

$$P(N) = 0,155 + 0,13 = 0,285$$

Passem a percentatge:

$$0,285 = 28,5\%$$

$$P(N) = 0,285 = 28,5\%$$

Interpretació: si escollim un treballador a l'atzar, la probabilitat que **no estiga satisfet amb la seua feina és del 28,5 %**.

- b) Escollint un treballador a l'atzar que no estigui satisfet amb la seva feina, quina és la probabilitat que tengui un salari inferior a la mediana? (1 pt)

b) Probabilitat que tinga un salari inferior a la mediana sabent que no està satisfet

Ara la pregunta és diferent.

Sabem que el treballador **no està satisfet** i volem saber quina probabilitat hi ha que tinga un salari **inferior a la mediana**.

Per tant, ens demanen:

$$P(I | N)$$

Ara hem d'utilitzar el **teorema de Bayes**:

$$P(I | N) = \frac{P(N | I) \cdot P(I)}{P(N)}$$

Ja coneixem tots els valors:

$$P(I | N) = \frac{0,31 \cdot 0,5}{0,285}$$

Calculem el numerador:

$$0,31 \cdot 0,5 = 0,155$$

Per tant:

$$P(I | N) = \frac{0,155}{0,285}$$

$$P(I | N) \approx 0,5439$$

En percentatge:

$$0,5439 \cdot 100 \approx 54,39\%$$

$$P(I | N) \approx 54,39\%$$

Interpretació: entre els treballadors que **no estan satisfets amb la seua feina**, aproximadament el **54,39 %** tenen un salari inferior a la mediana.