

Problema B1. — En una sala d'operacions podem dur a terme dos tipus d'operacions:

- Tipus A: Necessita 4 apòsits, 2 catèters, i té una durada de 0.5 hores.
- Tipus B: Necessita 6 apòsits, 1 catèter, i té una durada d'1 hora.

Necessitam fer almenys 10 operacions en total, i disposam només de 60 apòsits i 26 catèters. Quantes operacions de cada tipus hem de fer per maximitzar les hores d'ús de la sala d'operacions? (3 pt)

1. Definim les variables

Siguem:

- x = nombre d'operacions de **tipus A**.
- y = nombre d'operacions de **tipus B**.

Com que no podem fer una quantitat negativa d'operacions:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

2. Escrivim les restriccions

Restricció dels apòsits

Cada operació A necessita 4 apòsits i cada B en necessita 6.

Com que disposem de 60 apòsits:

$$4x + 6y \leq 60$$

Podem simplificar dividint entre 2:

$$\boxed{2x + 3y \leq 30}$$

Restricció dels catèters

Cada operació A necessita 2 catèters i cada B en necessita 1.

Com que tenim 26 catèters:

$$2x + y \leq 26$$

Restricció del nombre total d'operacions

Hem de fer almenys 10 operacions:

$$x + y \geq 10$$

3. Funció objectiu

Volem maximitzar les hores d'ús de la sala d'operacions.

Cada operació A dura 0,5 hores i cada B dura 1 hora.

Per tant:

$$H = 0,5x + y$$

Hem de maximitzar:

$$\max H = 0,5x + y$$

4. Busquem els vèrtexs de la regió factible

Tenim el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 30 \\ 2x + y \leq 26 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Per trobar el màxim, podem calcular la funció objectiu en els **vèrtexs** de la regió factible.

Vèrtex 1: $(0, 10)$

Si $x = 0$ i $x + y = 10$:

$$y = 10$$

Tenim:

$$H = 0,5(0) + 10 = \boxed{10}$$

Vèrtex 2: $(10, 0)$

Si $y = 0$ i $x + y = 10$:

$$x = 10$$

Aleshores:

$$H = 0,5(10) + 0 = \boxed{5}$$

Vèrtex 3: intersecció de les dues restriccions de recursos

Resolem:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ 2x + y = 26 \end{cases}$$

Restem la segona equació de la primera:

$$(2x + 3y) - (2x + y) = 30 - 26$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Substituïm en:

$$2x + y = 26$$

$$2x + 2 = 26$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

Tenim el punt:

$$(12, 2)$$

La funció objectiu és:

$$H = 0,5(12) + 2$$

$$H = 6 + 2 = \boxed{8}$$

Vèrtex 4: intersecció amb l'eix x

Amb $y = 0$:

$$2x + 3(0) = 30$$

$$x = 15$$

Però aquest punt **no és factible**, perquè la restricció dels catèters dona:

$$2(15) + 0 = 30 > 26$$

Per tant, $(15, 0)$ no pertany a la regió factible.

5. Compareu els resultats

Operacions A x	Operacions B y	Hores $H = 0,5x + y$
10	0	5
12	2	8
0	10	10

El valor màxim és:

$$H_{\max} = 10 \text{ hores}$$

i s'obté quan:

$$x = 0, \quad y = 10$$

6. Comprovació

Si fem 10 operacions de tipus B:

Apòsits

$$6 \cdot 10 = 60$$

Utilitzem exactament els **60 apòsits** disponibles.

Catèters

$$1 \cdot 10 = 10$$

Utilitzem 10 dels 26 catèters disponibles.

Nombre d'operacions

$$0 + 10 = 10$$

Compleix el mínim de 10 operacions.

Temps

Cada B dura 1 hora:

$$10 \cdot 1 = 10 \text{ hores}$$

Resposta final

Per maximitzar les hores d'ús de la sala d'operacions, hem de fer:

0 operacions de tipus A

i

10 operacions de tipus B

Així aconseguim un màxim de:

10 hores d'ús de la sala

Interpretació: convé fer totes les operacions de tipus B, perquè cada una proporciona **1 hora d'ús** i, amb els 60 apòsits disponibles, podem fer exactament 10 operacions B.

