

Problema B2. — Per a qualsevol valor del paràmetre x podem trobar tres matrius, A , B , C , de mida 3×3 , de manera que sempre se satisfan les igualtats següents:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \text{Id}, \quad B \cdot (C + C) = \text{Id}.$$

a) Per a quins valors del paràmetre x , $A \cdot A = \text{Id}$?

(1 pt)

a) Per a quins valors de x , $A \cdot A = I_d$?

Hem de calcular el producte:

$$A \cdot A = A^2$$

Pas 1. Multipliquem les matrius

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculem cada element.

Primera fila

Element $(1, 1)$:

$$0 \cdot 0 + 4(-2) + 2 \cdot 0 = -8$$

Element (1, 2):

$$0 \cdot 4 + 4x + 2 \cdot 6 = 4x + 12$$

Element (1, 3):

$$0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$$

Per tant, la primera fila és:

$$(-8, 4x + 12, 16)$$

Segona fila

Element (2, 1):

$$(-2)0 + x(-2) + 3(0) = -2x$$

Element (2, 2):

$$\begin{aligned} & (-2)4 + x^2 + 3(6) \\ & = -8 + x^2 + 18 = x^2 + 10 \end{aligned}$$

Element (2, 3):

$$\begin{aligned} & (-2)2 + x(3) + 3(2) \\ & = -4 + 3x + 6 = 3x + 2 \end{aligned}$$

Tercera fila

Element (3, 1):

$$0 \cdot 0 + 6(-2) + 2 \cdot 0 = -12$$

Element (3, 2):

$$0 \cdot 4 + 6x + 2 \cdot 6 = 6x + 12$$

Element (3, 3):

$$0 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 22$$

Així:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -8 & 4x + 12 & 16 \\ -2x & x^2 + 10 & 3x + 2 \\ -12 & 6x + 12 & 22 \end{pmatrix}$$

Pas 2. Igualem amb la matriu identitat

Volem que:

$$A^2 = I_d$$

i

$$I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Però comparem, per exemple, el primer element:

$$(A^2)_{11} = -8$$

mentre que:

$$(I_d)_{11} = 1$$

I això és impossible, ja que:

$$-8 \neq 1$$

A més, l'element $(1, 3)$ també dona:

$$16 \neq 0$$

i l'element $(3, 1)$:

$$-12 \neq 0$$

Per tant, **no hi ha cap valor de x** que pugui fer que $A^2 = I_d$.

Resposta de l'apartat a)

No existeix cap valor de x

b) Determina C en funció de x .

(2 pt)

b) Determina C en funció de x

Ara utilitzarem les dues igualtats que ens dona l'enunciat:

$$A \cdot B = I_d$$

i

$$B \cdot (C + C) = I_d$$

Pas 1. Simplifiquem $C + C$

Com que:

$$C + C = 2C$$

la segona igualtat queda:

$$B \cdot 2C = I_d$$

o equivalentment:

$$2BC = I_d$$

Pas 2. Utilitzem que $AB = I_d$

Tenim:

$$AB = I_d$$

Per tant, B és la matriu inversa de A :

$$B = A^{-1}$$

Això ens permet multiplicar l'equació

$$2BC = I_d$$

per A per l'esquerra:

$$A(2BC) = AI_d$$

Associem el producte:

$$2(AB)C = A$$

Com que:

$$AB = I_d$$

tenim:

$$2I_d C = A$$

Per tant:

$$2C = A$$

i finalment:

$$C = \frac{1}{2}A$$

Pas 3. Substituïm la matriu A

Tenim:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Multipliquem cada element per $\frac{1}{2}$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & \frac{x}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprovació important

Podem comprovar que A és invertible per a **qualsevol valor de x** calculant el determinant:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Desenvolupant per la primera columna:

$$\begin{aligned} |A| &= -2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2(4 \cdot 2 - 2 \cdot 6) \\ &= -2(8 - 12) \\ &= \boxed{8} \end{aligned}$$

Com que:

$$|A| = 8 \neq 0$$

A és invertible **per a tot x** , de manera que és coherent que $B = A^{-1}$.