

Problema C1. — Considera la funció $f(x) = x(x^2 - 2x + 1)$, per a $x \in (-\infty, \infty)$.

a) Calcula el valor de la funció en els extrems del domini. (1 pt)

a) Calcula el valor de la funció en els extrems del domini

El domini és:

$$(-\infty, +\infty)$$

Per tant, els seus «extrems» són els infinits:

$$x \rightarrow -\infty \quad \text{i} \quad x \rightarrow +\infty$$

Hem de calcular els límits de la funció.

Quan $x \rightarrow +\infty$

Tenim:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

El terme de major grau és x^3 , que domina els altres termes.

Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Quan $x \rightarrow -\infty$

De nou:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Ara $x^3 \rightarrow -\infty$, mentre que $x^2 \rightarrow +\infty$.

El terme de major grau és x^3 , per tant:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Resultat de l'apartat a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Calcula $f'(1)$.

(1 pt)

b) Calcula $f'(1)$

Primer derivem la funció.

Tenim:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Derivem terme a terme:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Ara substituïm $x = 1$:

$$f'(1) = 3(1)^2 - 4(1) + 1$$

$$f'(1) = 3 - 4 + 1$$

$$\boxed{f'(1) = 0}$$

Interpretació

La derivada en $x = 1$ és zero. Per tant, la **pendent de la recta tangent** a la gràfica en el punt $x = 1$ és 0.

c) Calcula $\int_0^1 f'(x) dx$.

(1 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f'(x) dx$

Aquí podem aplicar el **teorema fonamental del càlcul**:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

En aquest cas:

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0)$$

Calculem primer $f(1)$:

$$f(1) = 1(1^2 - 2 \cdot 1 + 1)$$

$$f(1) = 1(1 - 2 + 1)$$

$$f(1) = 0$$

Ara calculem $f(0)$:

$$f(0) = 0(0^2 - 2 \cdot 0 + 1)$$

$$f(0) = 0$$

Per tant:

$$\int_0^1 f'(x) dx = 0 - 0$$

$$\int_0^1 f'(x) dx = 0$$