

Problema C2. — Considera la funció $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$, per a $x \in [1, +\infty)$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$. Calcula o justifica, i indica sobre la gràfica el valor de la funció en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius i absoluts. (2 pt)

a) Gràfica, creixement, decreixement i extrems

1. Domini

Com que tenim una arrel quadrada, el que hi ha dins de l'arrel ha de ser major o igual que zero:

$$x - 1 \geq 0$$

Per tant:

$$x \geq 1$$

Així, el domini és:

$$D_f = [1, +\infty)$$

2. Valor de la funció en els extrems del domini

El domini té un extrem finit, que és $x = 1$, i s'estén fins a $+\infty$.

En $x = 1$

$$f(1) = 1 + \sqrt{1-1}$$

$$f(1) = 1 + \sqrt{0}$$

$$f(1) = 1$$

Per tant, la gràfica comença en el punt:

$$(1, 1)$$

Quan $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$$

Quan x creix indefinidament, també creix $\sqrt{x-1}$. Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Creixement i decreixement

Calculem la derivada:

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$$

Recordem que:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Per tant:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Aquesta derivada és positiva per a tot $x > 1$, ja que el denominador és positiu:

$$f'(x) > 0$$

Per tant, la funció és **estrictament creixent** en tot el seu domini.

Resultat

Creix:

$$(1, +\infty)$$

Decreix:

No decreix en cap interval

A $x = 1$ la derivada no està definida, però això no impedeix que la funció siga creixent a partir d'aquest punt.

4. Màxims i mínims

Com que la funció és creixent, el seu valor més petit es troba al principi del domini.

Tenim:

$$f(1) = 1$$

Per tant, hi ha un **mínim absolut** en:

$$x = 1$$

i el seu valor és:

$$f(1) = 1$$

És a dir, el punt de mínim és:

$$(1, 1)$$

També podem considerar-lo **mínim relatiu** perquè és l'extrem esquerre del domini.

Màxim

No existeix màxim, perquè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

La funció creix indefinidament.

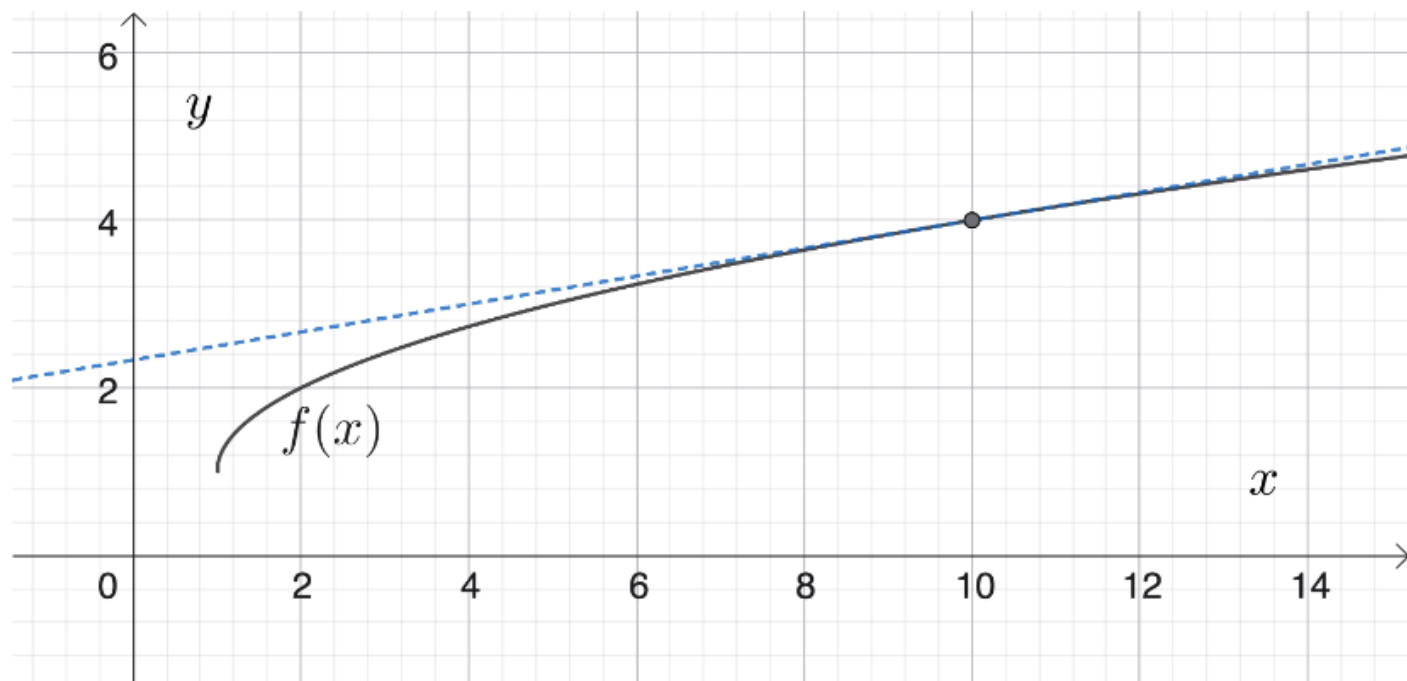
Per tant:

No té màxim absolut

ni màxim relatiu.

5. Esquema de la gràfica

La funció és una arrel quadrada desplaçada **1 unitat cap amunt** i **1 unitat cap a la dreta**.



- b) Sobre la mateixa gràfica, traça la recta tangent a la funció en el punt $x = 10$. Quin és el valor del seu pendent? (1 pt)

b) Recta tangent en $x = 10$

Ens demanen la recta tangent a la funció quan:

$$x = 10$$

1. Calculem el punt de tangència

Calculem $f(10)$:

$$f(10) = 1 + \sqrt{10 - 1}$$

$$f(10) = 1 + \sqrt{9}$$

$$f(10) = 1 + 3$$

$$f(10) = 4$$

Per tant, el punt de tangència és:

$$(10, 4)$$

2. Calculem la pendent

La pendent de la recta tangent és el valor de la derivada en $x = 10$.

Sabem que:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Substituïm $x = 10$:

$$f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{10-1}}$$

$$f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{9}}$$

$$f'(10) = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

Per tant:

$$f'(10) = \frac{1}{6}$$

Resposta al valor del pendent

$$m = \frac{1}{6}$$

3. Equació de la recta tangent

Utilitzem la fórmula:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Tenim:

$$(x_0, y_0) = (10, 4)$$

i:

$$m = \frac{1}{6}$$

Per tant:

$$y - 4 = \frac{1}{6}(x - 10)$$

Aquesta ja és l'equació de la recta tangent.

Si la volem desenvolupar:

$$y - 4 = \frac{x}{6} - \frac{10}{6}$$

$$y = \frac{x}{6} - \frac{5}{3} + 4$$

$$\boxed{y = \frac{x}{6} + \frac{7}{3}}$$